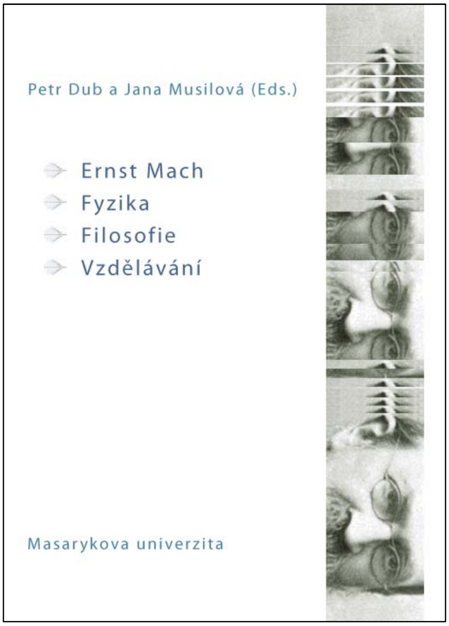
Olga Krupková, Jana Musilová

NEHOLONOMNÍ SÍLY A MACHŮV PRINCIP VE SPECIÁLNÍ TEORII RELATIVITY

Non-holonomic Forces and the Mach's Principle in Special Relativity Theory

Our contribution presents a specific look at the context of special relativity theory with Mach's principle, formulated by Mach himself very generally, on the border of physics and philosophy. Our approach leading to discover this connection is based on the understanding of a relativistic particle as a typically non-holonomic mechanical system, i.e. a system subjected to constraint conditions limiting the particle motion not only in the configuration space, but also in the space of velocities. It appears that such a concept and the corresponding mathematical treatment provides not only standard equations of motion, but, in addition, their generalisation, conjectured by Dicke within his effort to adapt the general relativity theory to Mach's principle.



KRUPKOVÁ, Olga a Jana MUSILOVÁ. Neholomní síly a Machův princip ve speciální teorii relativity. In: DUB, Petr a Jana MUSILOVÁ. *Ernst Mach – Fyzika – Filosofie – Vzdělávání*. 1. vyd. Brno: Masarykova univerzita, 2010, s. 161–164.
ISBN 978-80-210-4808-9.
DOI: 10.5817/CZ.MUNI.M210-4808-2011-161.

Neholonomní síly a Machův princip ve speciální teorii relativity

Olga Krupková, Jana Musilová

Jak známo, standardní pohybové rovnice hmotné částice ve speciální teorii relativity se vyvozují z lagrangiánu

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-v^2} + \vec{v}.\vec{A} - V,$$

a mají tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = \vec{v}\times \mathrm{rot}\vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}V,$$

kde $\vec{A}$ je vektorový a V je skalární potenciál, rychlost je vyjádřena v jednotkách rychlosti světla. Na základě těchto rovnic lze tedy říci, že přípustné interakce se uskutečňují prostřednictvím sil Lorentzova typu a sil potenciálových[1]. Vzniká otázka, zda existují i jiné fyzikálně přípustné typy silového působení. Myšlenky, že by tomu skutečně tak mohlo být, se objevují už od samého vzniku relativistické teorie. Některé vedly až k hypotézám, jak by takové silové působení mohlo vypadat – konkrétnější obrysy „nelorentzovské" síly, připouštějící interpretaci silového působení pocházejícího od „vzdálených těles", které předpokládal Ernst Mach, se objevují např. v práci R. Dickeho [3] z r. 1965. V této práci Dicke navazuje na teorii publikovanou dříve [1] (dnes známou jako Brans-Dickeho teorie), představující modifikaci obecné teorie relativity prostřednictvím dalekodosahového skalárního pole ψ, jež je v souladu s Machovým principem: Jedná se o slabé skalární pole přitažlivých sil srovnatelných svou velikostí se silami gravitačními, které neinteraguje s částicemi pohybujícími se rychlostí světla a s hmotnou částicí interaguje právě tehdy, je-li její hmotnost funkcí skalárního pole. Velikost síly, jíž toto pole na částici působí, klesá v závislosti na její rychlosti přímo úměrně výrazu $\sqrt{1-v^2}$.

[1] Síla na pravé straně samozřejmě nemusí zahrnovat pouze elektromagnetickou interakci. V může znamenat skalární potenciál elektromagnetického pole nebo jiný skalární potenciál. Stejně tak člen $\vec{v}\times \mathrm{rot}\vec{A}$ může připouštět i jiné typy silového působení, než jen elektromagnetické – v tomto tvaru lze zapsat například Coriolisovu nebo odstředivou sílu.

DOI: 10.5817/CZ.MUNI.M210-4808-2011-161

Pro matematika vzniká přirozená otázka, zda v rámci matematicky korektní a obecné formulace základů speciální teorie relativity lze získat obecnější pohybové rovnice částice, které by popisovaly i jiné typy silového působení než lorentzovské, a tyto „nové síly“ konfrontovat s hypotézami, které vycházely z čistě fyzikálních předpokladů a pozorování – například s již zmíněnou hypotézou Dickeho. Samozřejmě že matematik také očekává, že výsledkem úvah budou konkrétní formule a tvrzení, za jakých podmínek se nové pohybové rovnice redukují na známý tvar.

V práci [5] jsme ukázaly, že na položenou otázku existuje celkem překvapivá odpověď, nejen co do výsledku, ale i co do použitých metod jeho dosažení. Základní myšlenka je velmi jednoduchá a spočívá ve spojení variačního principu pro křivky v Minkowského časoprostoru $\mathbb{R}^4$ s moderní neholonomní teorií.

Uvažujme $\mathbb{R}^4$ s kanonickými souřadnicemi $(x^i) \equiv (x^1, x^2, x^3, x^4)$ a s Minkowského metrickým tenzorovým polem $g = -dx^1 \otimes dx^1 - dx^2 \otimes dx^2 - dx^3 \otimes dx^3 + dx^4 \otimes dx^4$. Variační princip pro křivky v $\mathbb{R}^4$ parametrizované parametrem s je definován funkcí akce

$$S : \gamma \to \int_a^b L(s, x^i(s), \dot{x}^i(s))ds,$$

kde γ je graf křivky $c : \mathbb{R} \ni s \to c(s) = (x^1(s), x^2(s), x^3(s), x^4(s)) \in \mathbb{R}^4$, tedy zobrazení $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$, zadané vztahem $\gamma(s) = (s, c(s))$, a $L(s, x^i, \dot{x}^i)$ je Lagrangeova funkce; tato funkce je definovaná na evolučním prostoru $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ se souřadnicemi $(s, x^i, \dot{x}^i)$. Na $\mathbb{R}^4$ uvažujme kromě *tenzorového* metrického pole g i kovariantní *vektorové* pole $\varphi = (\varphi_i)$ a *skalární* pole ψ. Pro částici s klidovou hmotností m uvažujme lagrangián ve tvaru *polynomu ve čtyřrychlosti*, kde koeficienty jsou uvažovaná pole, tj.[2]

$$L = -\tfrac{1}{2}mg(u, u) + \varphi(u) - \psi = -\tfrac{1}{2}m\, g_{ij}u^i u^j + \varphi_i u^i - \psi.$$

Relativistický Lagrangeův systém ale není volný, neboť platí podmínka pro čtyřrychlost

$$g(u, u) \equiv (\dot{x}^4)^2 - \sum_{p=1}^{3} (\dot{x}^p)^2 = 1.$$

Tato podmínka má charakter *neholonomní vazby* v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$. Z geometrického hlediska je neholonomní vazba nadplocha (přesněji *podvarieta*) v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$. A zde je právě klíč k modernímu uchopení neholonomní teorie: neholonomní systém je modelován jako *mechanický systém nikoliv v původním evolučním prostoru, nýbrž na této podvarietě* [4]. Ta tedy z fyzikálního hlediska představuje *skutečný evoluční prostor* pro vázaný systém. Dynamika je pak popsána pohybovými rovnicemi, tzv. *redukovanými rovnicemi* [4], které

[2]Všude v tomto textu používáme Einsteinovu sumační symboliku.

jsou sice ekvivalentní známým heuristickým Četajevovým rovnicím[3] [2], ale jsou diametrálně odlišné svým tvarem, počtem, strukturou i významem a interpretací. Okamžitě patrný zásadní rozdíl je v tom, že redukovaných rovnic je méně a neobsahují Lagrangeovy multiplikátory. Jelikož popisují dynamiku na skutečném evolučním prostoru, pro modelování relativistických systémů se přímo nabízejí.

Označme $x^4 = t$ a uvažujme na $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ nové souřadnice $(s, x^l, t, v^l, \dot{x}^4)$, definované transformačním vztahem $\dot{x}^l = v^l \dot{x}^4$, kde $l = 1, 2, 3$. Dále označme $\vec{A} = (\varphi_l)$ a $\varphi_4 = -V$. Výše uvedená relativistická podmínka na velikost čtyřrychlosti definuje v $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ podvarietu $\mathcal{Q}$ kodimenze 1, mající dvě nesouvislé komponenty. Vezmeme za evoluční prostor fyzikálně relevantní komponentu $\mathcal{Q}_+$, danou rovnicí

$$\dot{x}^4 = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Dosadíme-li do redukovaných rovnic uvažovaný lagrangián a vazbu, dostaneme pohybové rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = \vec{v} \times \mathrm{rot}\vec{A} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}V - \sqrt{1 - v^2}\,\mathrm{grad}\,\psi - \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}.$$

Vidíme, že silový člen na pravé straně kromě známé Lorentzovy síly obsahuje i novou sílu

$$\vec{\mathcal{B}} = -\sqrt{1 - v^2}\,\mathrm{grad}\,\psi - \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t},$$

která je nenulová pro nekonstantní skalární pole. Zabývejme se jí blíže. Předpokládejme dále pro jednoduchost, že Lorentzova síla je nulová, a upravme pohybové rovnice takto: místo skalárního potenciálu ψ a klidové hmotnosti částice m zaveďme veličiny

$$\mu = \frac{1}{m}\psi, \quad \widetilde{m} = me^{\mu}.$$

Pak můžeme pohybové rovnice zapsat v ekvivalentním tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\widetilde{m}\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2}}\right) = -\sqrt{1 - v^2}\,\mathrm{grad}\,\widetilde{m},$$

[3] Připomeňme si, že Četajevovy rovnice pro Lagrangeův systém o m stupních volnosti mají tvar Lagrangeových rovnic, na jejichž pravé straně stojí neholonomní síla, přesně

$$\frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} = \lambda_a \frac{\partial f^a}{\partial \dot{q}^i}, \quad 1 \le i \le m,$$

kde λ_a jsou Lagrangeovy multiplikátory a $f^a(t, q^1, \ldots, q^m, \dot{q}^1, \ldots, \dot{q}^m) = 0$, $1 \le a \le k < m$, jsou rovnice neholonomních vazeb.

což je pohybová rovnice pro částici s *proměnnou hmotností* $\widetilde{m}$, závisející na skalárním potenciálu μ, v silovém poli

$$\vec{\mathcal{D}} = -\widetilde{m}\sqrt{1-v^2}\,\mathrm{grad}\,\mu = -\sqrt{1-v^2}\,\mathrm{grad}\,\widetilde{m}.$$

Tento vzorec je ve shodě s Dickeho předpovědí síly [3], která by měla respektovat Machův princip. Proto $\vec{\mathcal{D}}$ nazýváme *Dickeho silou.*

Na závěr si ještě všimněme, že v elektromagnetickém poli mají pohybové rovnice tvar

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\widetilde{m}\vec{v}}{\sqrt{1-v^2}}\right) = e^{\mu}\,\vec{\mathcal{F}}_L + \vec{\mathcal{D}},$$

kde $\vec{\mathcal{F}}_L$ je standardní Lorentzova síla.

Poděkování. Autorky děkují za podporu grantu GAČR 201/06/0922 a výzkumným záměrům MSM 0021622409 a MSM 6198959214.

Seznam odkazů

[1] C. Brans, R. Dicke: Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation. *Phys. Rev.* **124** (1961), 925–935.

[2] N. G. Chetaev: On the Gauss principle. *Izv. Kazan. Fiz.-Mat. Obsc.* **6** (1932–33), 323–326 (rusky).

[3] R. Dicke: The influence of the time dependent gravitation interaction on the Solar system. V: *Gravity and Relativity* (Ed.: W. F. Hoffmann). Mir, Moscow 1965 (rusky).

[4] O. Krupková: Mechanical systems with non-holonomic constraints. *J. Math. Phys.* **38** (1997), 5098–5126.

[5] O. Krupková, J. Musilová: The relativistic particle as a mechanical system with non-holomic constraints. *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** (2001), 3859–3875.